Title	M/G/S待ち行列の近似について(待ち行列理論とその周辺)
Author(s)	木村, 俊一
Citation	数理解析研究所講究録 (1984), 519: 224-233
Issue Date	1984-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/98423
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
519巻 1984年 224-233

M/G/S 待ち行列の近似について

東京工業大学 理学部 情報科学科
木村俊一 (Toshikazu Kimura)

0. はじめに

近年、精力的に行われてきた M/G/S 待ち行列に対する様々な近似解法の研究も一段落着いた感がある。その原因の1つには、実用上十分な精度をもつ近似解が得られたことにもあるが (e.g., Boxma et al. (1979), Tijms et al. (1981))、今1つには到着過程の一般化の必要性が、非マルコフ的な待ち行列ネットワーク等の研究に伴って認識されてきたことにある。

M/G/S 待ち行列の近似の研究は、待ち特性量の平均値のみを対象とするか、分布にまで解析をひろげるかで大きく2つに分けられる。しかしながら後者に属する研究はまだ十分なものとはいえず、わずかに

Hokstad (1978) : 補助変数法

Tijms et al. (1981) : regenerative 法

van Hoorn and Tijms (1982) : regenerative 法

Kimura (1983) : 拡散近似

Miyazawa (1983) : 保存則

を数えるばかりである。これらの近似は精度の点からも、扱い易さの点からも、まだ改良の余地がかなり残されている。

1. 平均待ち時間に対する近似式

Poisson 過程に従って客が到着し、一般分布に従うサービスを先着順で受ける標準的な M/G/S 待ち行列を考える。待ち合い室の大きさは無限大であると仮定する。サービス時間の間、さらに到着とサービスの過程の間の独立性も、当然仮定されている。

まず、このシステムを特徴付けるパラメータをその記号と共にまとめておこう。

s : 窓口数

λ : 到着率

μ : サービス率（= 平均サービス時間の逆数）

c_s : サービス時間の変動係数（= サービス時間の標準偏差 × μ）

B : サービス時間分布

また、次の記号を定義する。

ρ : トラヒック密度（= $\lambda/s\mu$）

B_e：サービス時間の定常残余寿命分布

i.e., $$B_e(x) = \mu \int_0^x \{1 - B(u)\} du, \quad x \geq 0$$

これらのパラメータを用いて、平均待ち時間に対する近似式が、多くの研究者達によって提案されている。この節では年代を追ってそれらをまとめることにする。なお、同一の近似式が異なる方法によって導かれている場合には、年代の早い方を代表とし、他については著者名を併記するにとどめた。また、近似式中で M/M/S, M/D/S 待ち行列に対する平均待ち時間の厳密解を用いる場合には、夫々を W_{MMS}, W_{MDS} で表わすことにする。これらは、上記のパラメータを用いて、次のように表わせる。

$$W_{MMS} = \frac{\dfrac{(s\rho)^s}{s!\,(s\mu)(1-\rho)^2}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^j}{j!} + \frac{(s\rho)^s}{s!} \frac{1}{1-\rho}}$$

$$W_{MDS} = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-js\rho} \sum_{k=js}^{\infty} \left\{ \frac{(js\rho)^k}{k!} - \frac{1}{\rho} \frac{(js\rho)^{k+1}}{(k+1)!} \right\}$$

1) Lee and Longton (1957)

$$W_{HGS}^{LL} = \frac{1+C_S^2}{2} W_{HHS}$$

もともとM/G/1とM/M/1との平均待ち時間の比をW_{HHS}に乗ずるという考え方にたって見出された単純な近似式ではあるが、その後、

Maalφe：第2近似（1973），

Krampe et al.（1973），

Stoyan（1976），

Nozaki and Ross（1978），

Hokstad（1978），

Mori（1980），

宮沢（1981），

Tijms et al.：Case B（1981），

により"再発見"されている。

2) Elldin（1969）

$$W_{HGS}^{E} = C_S^2 W_{HHS} + (1-C_S^2) W_{HDS}$$

W_{HHS}とW_{HDS}を線形補間して得られたもので、同じ式をCosmetatos（1976）が、またGI/G/Sに対して一般化した式を

Page (1972)が提案している。

3) Sakasegawa (1977)

$$W_{MGS}^{S} = \frac{1+C_S^2}{2} \frac{\rho^{\sqrt{2(S+1)}-1}}{\mu(1-\rho)}$$

GI/G/S に対する Page (1972) の近似式より、数値的な検証をもとに単純化した式である。

4) Takahashi (1977)

$$W_{MGS}^{T} = \left\{ \mu^{\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha} dB(x) \right\}^{\frac{1}{\alpha-1}} W_{MDS}$$

ここで、α は次の方程式の (0, 2] 内の根,

$$W_{MMS} = \left\{ \Gamma(z+1) \right\}^{\frac{1}{z-1}} W_{MDS}$$

5) Boxma, Cohen and Huffels (1979)

$$W_{MGS}^{BCH} = \frac{(1+C_S^2) W_{MMS} W_{MDS}}{(1-\beta(S)) W_{MMS} + 2\beta(S) W_{MDS}} , \quad S \geq 2$$

ここで、

$$\beta(S) = \frac{1+C_S^2}{\mu(S-1)\int_0^{\infty} \{1-Be(x)\}^S dx} - \frac{S+1}{S-1}$$

6) Tijms, van Hoorn and Federgruen : Case A (1981)

$$W_{HGS}^{THF} = \left[\rho \frac{1+C_S^2}{2} + (1-\rho) s\mu \int_0^\infty \{1 - Be(x)\}^s dx \right] W_{HHS}$$

彼らはこの他に、Case B と Case C という近似式を提案している。Case Bは W_{HGS}^{LL} と一致し、Case Cは二重積分を含む複雑な形を持ち、平均待ち時間についてはCase B以下の精度であるため省略する。

7) Kimura (1983)

$$W_{HGS}^{K} = \frac{-\frac{a_s}{2b_s} g_{s-1} e^{\frac{2b_s}{a_s}}}{\lambda\left(\sum_{j=0}^{s-1} \phi_j - \frac{a_s}{2b_s} g_{s-1}\right)\left(1 - e^{\frac{2b_s}{a_s}}\right)}, \quad s \geq 2$$

ここで、

$$a_k = \lambda + k\mu C_s^2 \qquad (k = 1, 2, \cdots, s)$$

$$b_k = \lambda - k\mu$$

$$g_1 = \begin{cases} \frac{\lambda}{b_1}\left(e^{\frac{2b_1}{a_1}} - 1\right), & \text{if } b_1 \neq 0 \\ \frac{2\lambda}{a_1}, & \text{if } b_1 = 0 \end{cases}$$

$$g_k = g_1 \prod_{j=2}^{k} e^{\frac{2b_j}{a_j}} \qquad (k = 2, \cdots, s-1)$$

$$\phi_0 = 1$$

$$\phi_1 = \begin{cases} \frac{\lambda}{b_1}\left\{\frac{a_1}{2b_1}\left(e^{\frac{2b_1}{a_1}} - 1\right) - 1\right\}, & \text{if } b_1 \neq 0 \\ \frac{\lambda}{a_1}, & \text{if } b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\phi_k = \begin{cases} \dfrac{a_k}{2b_k}(g_k - g_{k-1}), & \text{if } b_k \neq 0 \\ g_k, & \text{if } b_k = 0 \end{cases} \qquad (k=2,\cdots,s-1)$$

原点に基本復帰境界、拡散パラメータが区分的線形関数の拡散過程を用いた近似モデルより導かれた。

2. 近似式の一致性

近似式の精度は、一般的には、限られた厳密解との数値的な比較により検証されるが、この方法では近似式がいつでも安心して使えるという保証は得られない。むしろ、特別な状況における厳密解の性質を、近似解が持ち合わせているか否かをチェックする方法の方が、近似の"信頼度"を確かめるのには都合が良い。

以下では、サービス時間分布を特定した場合や、平均待ち時間のある漸近的な性質を、近似精度検証の指標として、前節の種々の近似式を比較する。 $W^{\times}_{MGS}$ で M/G/S 待ち行列の平均待ち時間のある近似式を表わすことにしよう。

Consistency Checks

(i) $W^{\times}_{MMS} = W_{MMS}$

(ii) $W^{\times}_{MDS} = W_{MDS}$

(iii) Heavy traffic 時の W^X_{MGS} の漸近的性質

(iv) Light traffic 時の W^X_{MGS} の漸近的性質

(v) $s \to \infty$ とした時の W^X_{MGS} の漸近的性質

以上の指標を満足するか否かで各近似式を評価したのが次の表である。チェックに合格する場合には丸印を付けてある。

W^X_{MGs} \ C.C.	M/M/s	M/D/s	$\rho \to 1$	$\rho \to 0$	$s \to \infty$
W^{LL}_{MGs}	○		○		
W^{E}_{MGs}	○	○	○		○
W^{S}_{MGs}			○		
W^{T}_{MGs}	○	○	○		○
W^{BCH}_{MGs}	○	○	○	○	○
W^{THF}_{MGs}	○		○	○	○
W^{K}_{MGs}			○		

3. おわりに

M/G/s 待ち行列の平均待ち時間に対する種々の近似のまとめと、それらの精度の1つの測度としての一致性の検証を行なった。その結果、現時点では Boxma et al. (1979) の近似式 W_{HGS}^{BCH} が最も安心して使えるものであることが判明した。なお、Miyazawa (1983) の提案する新しい近似式については、一致性の指標の内、(ii), (iv), (v) について改良の必要があることを附記しておく。

References

Boxma, O.J., J.W. Cohen and N. Huffels. 1979. Approximations of the Mean Waiting Time in an M/G/s Queueing System. Opns. Res., 27, 1115-1127.

Cosmetatos, G.P. 1976. Some Approximate Equilibrium Results for the Multi-Server Queue (M/G/r). Opnl. Res. Quart., 27, 615-620.

Elldin, A. 1969. Switch Calculations. General Survey, Ed. 3, L.M. Ericsson (ed.). Stockholm.

Hokstad, P. 1978. Approximations for the M/G/m Queue. Opns. Res., 26, 510-523.

Hoorn, M.H. van and H.C. Tijms. 1982. Approximations for the Waiting Time Distribution of the M/G/c Queue. Perform. Eval., 2, 22-28.

Kimura, T. 1983. Diffusion Approximation for an M/G/m Queue. Opns. Res., 31, 304-321.

Krampe, H., J. Kubat and W. Runge. 1973. Bedienungsmodelle, Oldenbourg, München.

Lee, A.M. and P.A. Longton. 1957. Queueing Process Associated with Airline Passenger Check-in. Opnl. Res. Quart., 10, 56-71.

Maaløe, E. 1973. Approximation Formulae for Estimation of Waiting-Time in Multiple-Channel Queueing System. Mgmt. Sci., 19, 703-710.

宮沢政清. 1981. 複雑な待ち行列システムへ点過程理論をもちいる方法とその応用について. 通信トラヒックのシステム科学的研究(2), 電々公社成果報告 第17371号.

Miyazawa, M. 1983. Approximation Formulae for M/GI/s and M/GI/s/r Queues derived from the Invariance Relations. (in preparation).

Mori, M. 1980. Relations between Queue-Size and Waiting-Time Distributions. J. Appl. Prob., 17, 822-830.

Nozaki, S.A. and S.M. Ross. 1978. Approximations in Finite-Capacity Multi-Server Queues with Poisson Arrivals. J. Appl. Prob., 15, 826-834.

Page, E. 1972. Queueing Theory in OR. Butterworth, London.

Sakasegawa, H. 1977. An Approximation Formula $L_q \approx \alpha \cdot \rho^{\beta}/(1-\rho)$. Ann. Inst. Statist. Math., 29, Part A, 67-75.

Stoyan, D. 1976. Approximations for M/G/s Queues. Math. Oper. Statist., 7, 587-594.

Takahashi, Y. 1977. An Approximation Formula for the Mean Waiting Time of an M/G/c Queue. J. Opns. Res. Soc. Japan., 20, 150-163.

Tijms, H.C., M.H. van Hoorn and A. Federgruen. 1981. Approximations for the Steady-State Probabilities in the M/G/c Queue. Adv. Appl. Prob., 13, 186-206.

Toshikazu KIMURA
Dept. of Information Sciences
Tokyo Institute of Technology
Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152
JAPAN